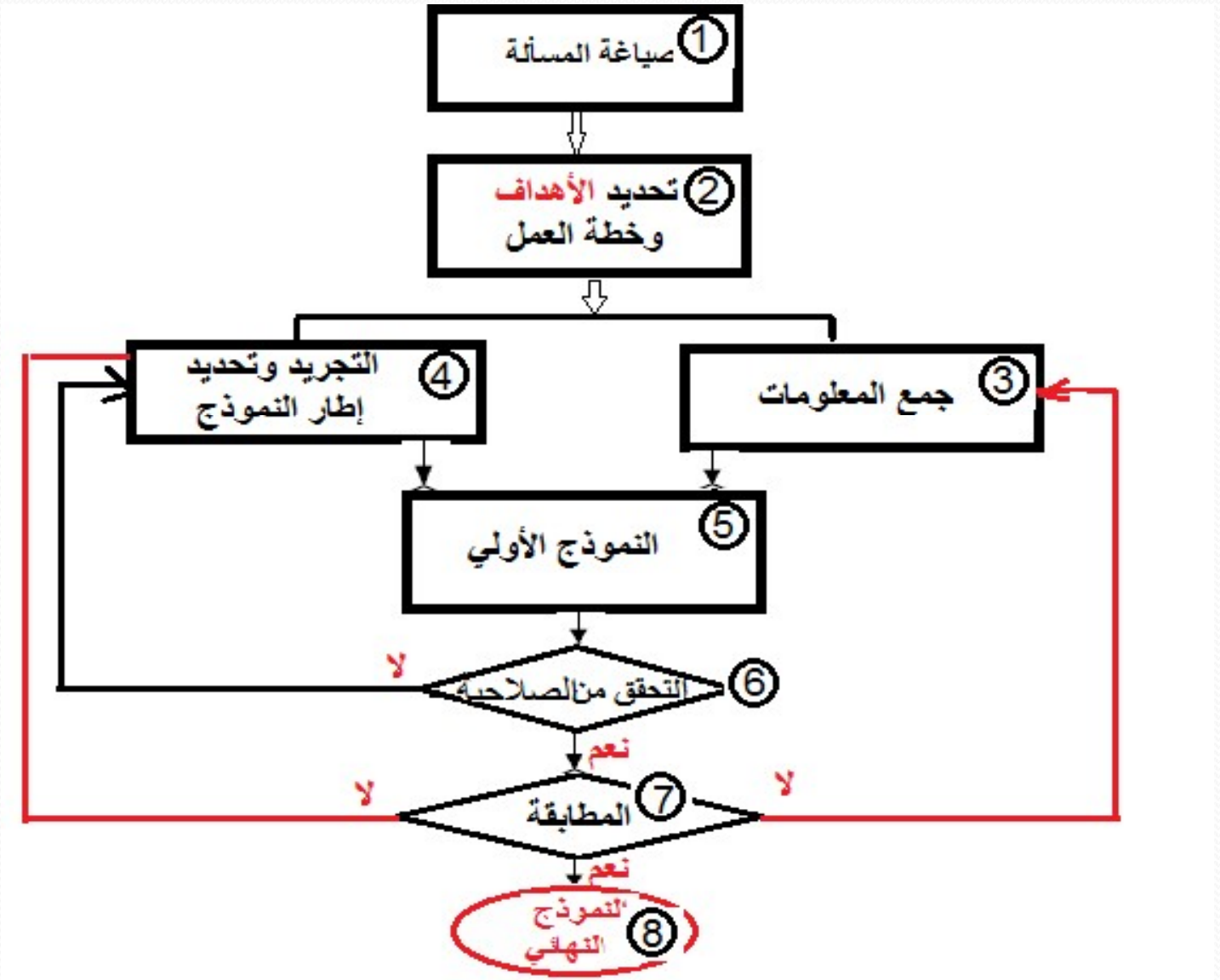
مراحل النمذجة الرياضية



- **صياغة المسألة:** تشكل منطلق كل عمل هندسي تقريبا، ويوضح فيها النتيجة التي يتوقع الحصول عليها فنقول مثلا "المطلوب وضع نموذج رياضي تفصيلي مبسط للمحرك العنفي الغازي"
- **تحديد الأهداف وخطة العمل:** هي خطوة أساسية بالنظر إلى أن الهدف من عملية النمذجة والغاية التي يستخدم النموذج لأجلها تعتبر حاسمة في تحديد المتطلبات المفروضة على هذا النموذج من حيث الدقة ودرجة التفصيل والمطابقة وطبيعة النموذج (معادلات تفاضلية أو معادلات حالة أو تابع تحويل) .. وهذا بدوره يحدد خطة العمل وطريقة النمذجة الممكنة.
- **جمع المعلومات:** هذه المرحلة مهمة أيضا لأن توفر المعلومات عن بنية المنظومة وطبيعتها الفيزيائية يسمح باختيار الطريقة النظرية في النمذجة وإلا كان علينا التفكير بالطريقة التجريبية أو المختلطة ... وأهم المعلومات التي لابد منها هي فرضيات التبسيط Assumptions التي يمكن اعتمادها واعتبارها مقبولة بالنسبة للهدف المحدد. إن هذه الفرضيات هي التي تسمح بتبسيط النموذج إلى حد معقول دون أن يؤثر هذا التبسيط بشكل كبير سلبا على جودة حل المسألة.
- **التجريد وتحديد إطار النموذج:** إن التفكيك Decomposition أو التجريد Abstraction هو مسألة تجري فقط خلال النمذجة النظرية و المختلطة و يقصد بها عملية تجزئة المنظومة إلى عناصر أو أجزاء أساسية يجري توصيفها بشكل جزئي ثم يتم دمج العلاقات التي تصف هذه الأجزاء بالاعتماد على قوانين تبادل و انحفاظ المادة و الطاقة و المعلومات ... ويقود هذا التفكيك إلى التعرف على رتبة النموذج الناتج وعدد إشارات الدخل و الخرج (بعد النموذج) وبالتالي إلى تحديد صيغة النموذج أو الإطار الرياضي المناسب له.
- **النموذج الأولي** يشكل أول نتيجة لعملية النمذجة ويمكن أن يكون على شكل معادلة أو جملة معادلات تفاضلية جبرية بشكلها الخام (الذي قد يكون غير جاهز للاستخدام في الحل النهائي) ..

• **التحقق من الصلاحية**: يتم هنا التأكد من أن النموذج الناتج يعكس الخصائص الأساسية للأصل من حيث الرتبة والمواصفات الستاتيكية والديناميكية .. ويتم هنا أيضا النظر في إمكانية كفاية النموذج لحل المسألة المحددة وقد تتطلب العودة ربما إلى فرضيات التبسيط فيجري حذف أو إضافة بعض الفرضيات ... كما أن هذه المرحلة تقترن بعملية أخرى هي تبسيط النموذج Model reduction للمنظومات المعقدة متعددة الأبعاد و التي توصف بمعادلات عالية الرتبة (هذا الموضوع يخرج حاليا عن نطاق دراستنا). وقد تفرض نتيجة هذه العملية العودة مرارا إلى مرحلة التجريد و تحديد إطار النموذج أو إلى مرحلة جمع المعلومات ... للتأكد من فرص تحسين وتطوير النموذج.

• **بعد التحقق من صحة وصلاحية النموذج تجري عملية التحقق من المطابقة والتي تشكل أول اختبار حقيقي للنموذج (تجربة)** .. حيث يتم تطبيق إشارة دخل مثلا على النموذج ومقارنة استجابته مع استجابة المنظومة الفعلية. فإذا كانت نتيجة المقارنة مقبولة يتم اعتماد النموذج وإلا كان لابد من العودة بالعملية إلى مراحل سابقة بحثا عن فرص زيادة المطابقة. وتتم في هذه المرحلة عملية ضبط لقيم البارامترات أو الثوابت في النموذج ....

تصنيف النماذج الرياضية

- **حسب التقانة المستخدمة**

أ – تقليدي تشابهي (مستمر)　　ب – رقمي حاسوبي (متقطع)

- **حسب الجهاز الرياضي (الصيغة الرياضية)**

أ – معادلات تفاضلية　　ب– توابع التحويل

ج– معادلات فضاء الحالة　　د– نموذج غائم

هـ – نموذج احتمالاتي

- **حسب الغاية**

أ– تنبؤي　　ب – تشخيصي

ج – تحليلي

- **حسب شموليته:**

أ– عام يتعامل مع خرج ودخل الغرض أو المنظومة بغض النظر عن تفاصيلها

ب – مفصل يتألف من دمج نماذج عناصر المنظومة

ووفقا لمبادئ تصنيف أخرى نجد نماذج إما مستمرة أو متقطعة و إما عشوائية أو تحديدية و غير ذلك...

الأجهزة الرياضية المستخدمة في النمذجة الرياضية

$$E = mc^2, \quad w^T x \leq 10$$

✓علاقات رياضية (معادلات و متراجحات)

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$$
$$\dot{y}(t) = y(t)$$
$$\dot{x}(t) = -mx(t) + ay(t) + c$$
$$\dot{y}(t) = bx(t) - ny(t) + d$$

✓جملة معادلات تفاضلية عادية

$$u_{xx} + u_{yy} = f \quad \text{für} \quad (x, y) \in \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \in \delta\Omega$$

✓جملة معادلات تفاضلية جزئية

(تشوه غشاء مشدود من حافته تحت تأثير ثقل f)

✓التوزعات الاحتمالاتية (التشويش في نظم التحكم، الضجيج ..)

✓المنطق الترجيحي Fuzzy logic

✓الشبكات العصبونية

✓البنى الجبرية (مجموعات الميكانيك الكمومي، الأجسام المنتهية في الكريبتولوجيا)

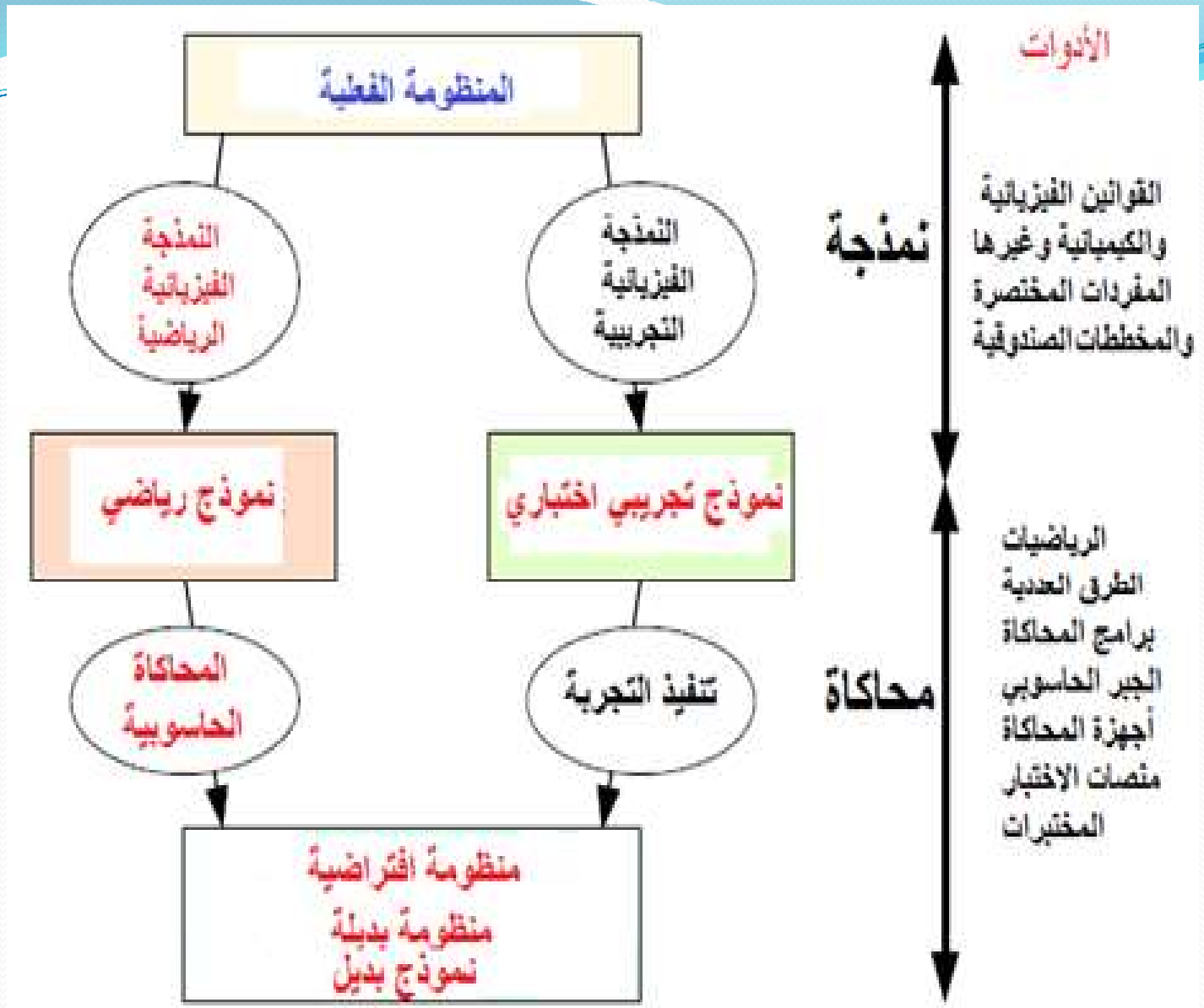
العلاقة بين النمذجة والمحاكاة

المحاكاة هي تجربة يتم إجراؤها على النموذج بهدف الحصول على مزيد من المعلومات حول العمليات التي تجري فيه. هذه التجربة قد تكون:

– مخبرية يتم إجراؤها على نموذج مخبري في المختبر بمقاييس قد تكون مختلفة عن المقاييس الفعلية وبتجهيزات تراعي متطلبات الدقة والوضوح والسلامة المهنية.

– واقعية اختبارية يتم تنفيذها على نموذج اختباري حقيقي مطابق للواقع قدر الإمكان

– رياضية يتم تنفيذها على الورق أو على الحاسوب بالاعتماد على النموذج الرياضي وباستخدام أدوات التحليل الرقمي المتاحة (المحاكاة الرقمية أو الحاسوبية)، وهي ما يشكل مكتسبا مهما من مكتسبات تقانة المعلوماتية في العلوم الهندسية، وهو موضوع مقررنا في إطار التدريب العملي على بيئة المتلاب والسيمولينك. هذا النوع من المحاكاة يمكن تعريفه بأنه عبارة عن تجربة افتراضية **vertual experiment** حاسوبية يتم إجراؤها على النموذج الرياضي بهدف الحصول على معلومات عن هذا النموذج وعن المنظومة الحقيقية التي يمثلها.



الحل الحاسوبي للمعادلات التفاضلية يعتمد الطرق المعروفة للحل ولكن بالصيغة المتقطعة discrete، غير أن العديد من الحزم البرمجية المتوفرة تقوم بعملية التقطيع تلقائيا وتسمح بإدخال هذه المعادلات بصيغتها المستمرة continuous form